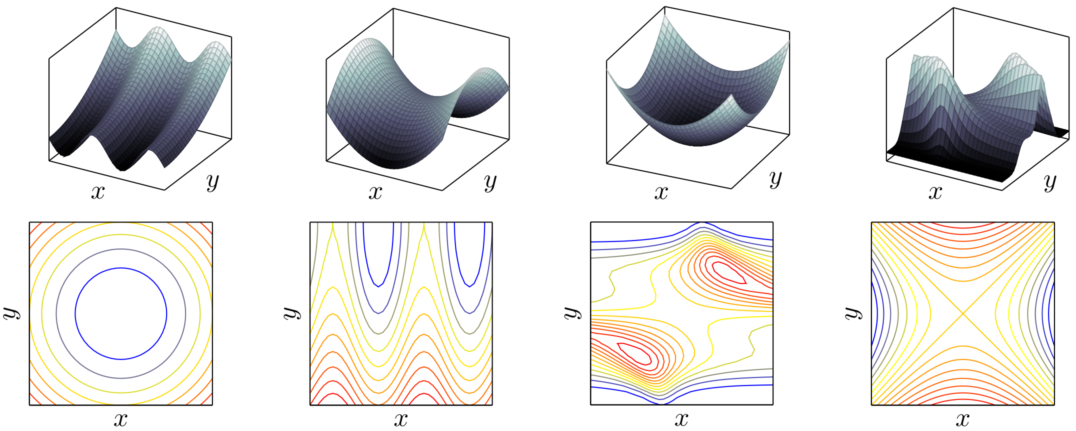
TD_{20} – Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 Lecture graphique ★

Pour chacune des fonctions tracées ci-dessous, lui associer ses lignes de niveau.



Exercice 2 ★

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, justifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, et calculer son gradient.

1. $a : (x, y) \mapsto x^2y + x^2y^2 + 2x\mathrm{e}^y$
2. $b : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{xy}$
3. $c : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 3)$
4. $d : (x, y) \mapsto \cos(x + y) + \sin(x - y)$
5. $e : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$
6. $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{xy}}{\cos(xy) + 2}$
7. $g : (x, y) \mapsto x\cos(y) + y\cos(x)$
8. $h : (x, y) \mapsto \arctan\left(\dfrac{x^2}{1 + y^2}\right)$
9. $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto xy\mathrm{e}^{-x^2+2y}$
10. $j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto xy\mathrm{e}^z + xz\mathrm{e}^y + yx\mathrm{e}^x$
11. $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^2 + \cdots + x_n^2)\mathrm{e}^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$.

Exercice 3 ★

On définit f sur $\mathbb{R}^3$ par : $f(x, y, z) = \sin^2 x + \cos^2 y + z^2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le développement limité d'ordre 1 de f en un point $A = (x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 4 ★

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (x - y, x + y)$ où $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Déterminer $\dfrac{\partial f \circ \varphi}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f \circ \varphi}{\partial y}$.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$F(x, y) = f\big(x + \varphi(y)\big).$$
Vérifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Exercice 5 ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, |f(x,y,z)| \leqslant |yz|$.
2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 Étude d'un extremum par variation de fonctions ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Montrer que f n'admet pas de maximum.
2. On se propose de montrer que f possède un minimum.
   (a) En considérant $f(-x,-y)$, montrer qu'on peut se restreindre à $y \geqslant 0$.
   (b) Pour $y \geqslant 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x,y)$ admet un minimum noté $g(y)$.
   (c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que f admet un minimum, et préciser le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

Exercice 7 ★★

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = \mathrm{e}^x(x + y^2 + \mathrm{e}^x)$. On considère également la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1 + t + 2\mathrm{e}^t$.

1. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Justifier que $\alpha \in [-2,-1]$.
3. En déduire que g possède un unique point critique, que l'on exprimera en fonction de α.
4. Déterminer la nature locale de ce point critique
5. En remarquant que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g(x,y) \geqslant g(x,0)$, montrer que g possède un minimum global.

Exercice 8 ★★★

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$ est $\mathcal{C}^1$ et qu'elle possède une infinité de points critiques.

Ces points critiques correspondent-ils à des extrema de f ?

Exercice 9 ★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (x+y+z)\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses points critiques.
2. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $|x+y+z| \leqslant \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
3. En étudiant la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(t) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t/6}$, déterminer la nature des points critiques de f.

Exercice 10 ★★

Soit f la fonction définie sur $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ par $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{x+y}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω, et calculer ses dérivées partielles premières et secondes.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Montrer que f admet un extremum local sur Ω.

Exercice 11 ★★

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$.
2. $g : (\mathbb{R}^*)^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 4xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

3. $h : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x+y}$.

Exercice 12 ★★

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique.
2. Déterminer les valeurs propres de la hessienne en ce point critique. Peut-on conclure quant à la nature de ce point critique ?
3. Étudier les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$, et conclure.

Exercice 13 ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Montrer que f admet exactement cinq points critiques, dont le point $(0, 0, 0)$.
3. Déterminer la matrice hessienne de f en $(0, 0, 0)$, et en déduire que f possède un minimum local en $(0, 0, 0)$. Est-ce un minimum global de f ?
4. Pour chacun des autres points critiques, vérifier que 4 est valeur propre de la matrice hessienne, et déterminer si f admet ou non un extremum local en ce point.

Exercice 14 ★★★

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer son gradient.
2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = \ln t - t + \dfrac{1}{t}$.
   Montrer que si (x, y) est un point critique de f, alors $\varphi(\ln y) = 0$.
3. En étudiant le sens de variations de φ, montrer que f possède un unique point critique (x_0, y_0).
4. Montrer que pour $\alpha \in [0, 1[$, $f(x_0+\alpha, y_0-\alpha) = -f(x_0-\alpha, y_0+\alpha)$. f admet-elle un extremum local sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?

Exercice 15 ★★★

Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$, et soit $\mathcal{D}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}$.
On admet que $\mathcal{D}$ est fermé, que $\mathcal{D}_0$ est ouvert, et que tous les deux sont bornés.
Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$.

1. Justifier que f possède un maximum M et un minimum m.
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathcal{D}_0$.
3. Étudier les fonctions $x \mapsto f(x, x^2 - 1)$ et $x \mapsto f(x, 1 - x^2)$, et en déduire les valeurs de m et M.

Exercice 16 ★★★

Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $f(x, y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Justifier que f admet un minimum m et un maximum M sur $\mathcal{D}$.
2. Montrer que sur $B(0, 1)$, f n'admet pas de point critique. Que peut-on en déduire à propos de m et M ?
3. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$, déterminer les valeurs de m et M.

Exercices issus d'oraux

Exercice 17 ★★★★

(*Oral 2008*)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$
2. La fonction ainsi prolongée est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 18 ★★★★

(*Oral 2011*)

Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On pourra poser $u = \dfrac{x}{y}$ et $v = xy$.

Exercice 19 ★★★

(*Oral 2011*)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et F définie par $F(x,y) = \displaystyle\int_{-x}^{y} \mathrm{e}^{x+t} f(2x+t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, *on pourra poser un changement de variable.*
2. Déterminer f pour que F soit solution de l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial F}{\partial x} - 4\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + F = 1$.

Exercice 20 ★★

(*Oral 2016*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Étudier l'existence d'extréma de f.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2+y^2 \leqslant 2\}$. Étudier les extremas de f sur D.

Exercice 21 ★★★

(*Oral 2015,2016,2018*)

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, justifier la convergence de l'intégrale $F(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
2. On donne

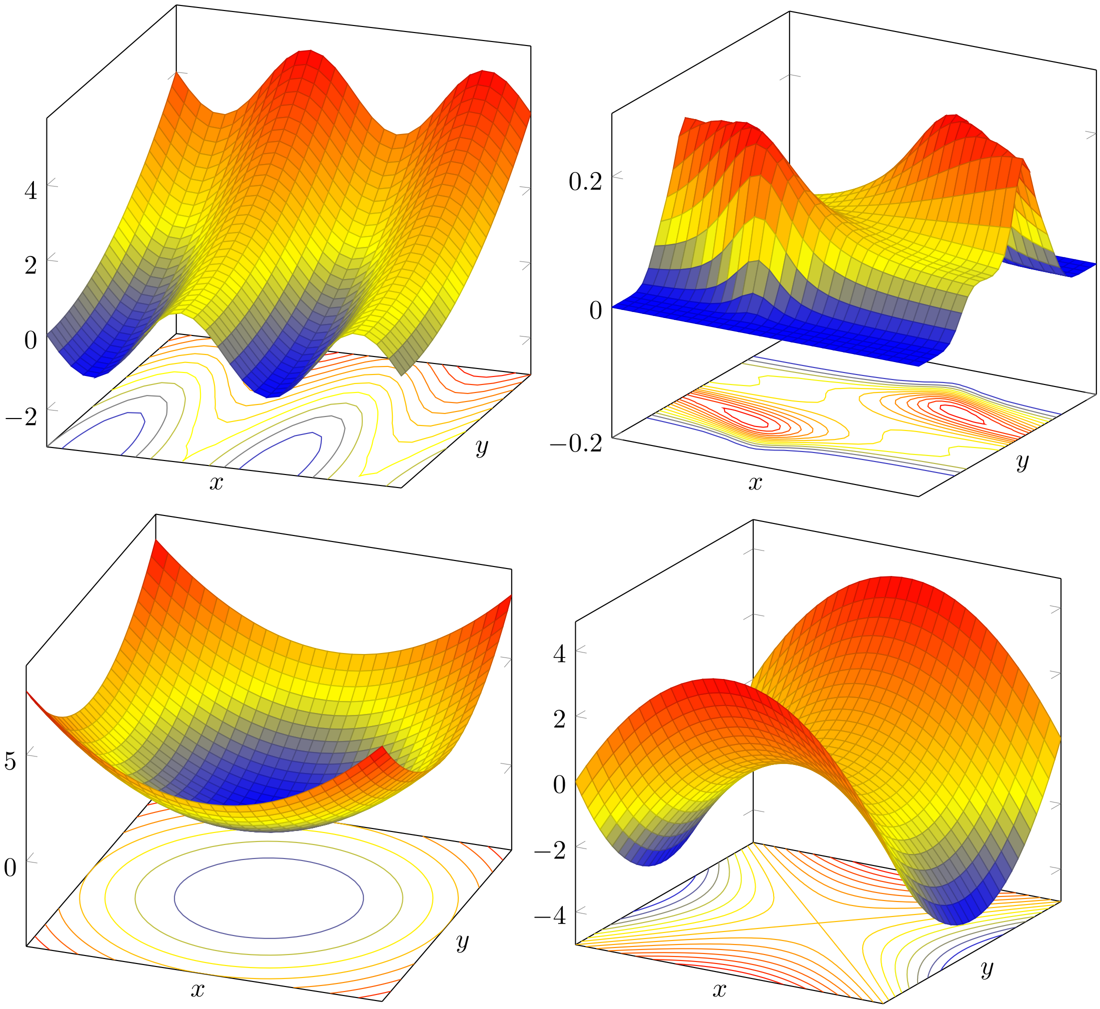
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^4\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

   Montrer que, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $F(x,y) = x^2y^2 + \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+4xy) + \dfrac{3}{4}$
3. Déterminer les points critiques de F et étudier leurs natures.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Un dessin vaut mieux qu'une longue explication :



Corrigé de l'exercice 2

1. $a : (x, y) \mapsto x^2y + x^2y^2 + 2x\mathrm{e}^y$

   La fonction $(x, y) \mapsto y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$(fonction usuelle), par composition on en déduit que la fonction $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^y$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + x^2y^2$ et $(x, y) \mapsto 2x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale. Ainsi a est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

   On a
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial a}{\partial x}(x, y) = 2xy + 2xy^2 + 2\mathrm{e}^y \qquad \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2x^2y + 2x\mathrm{e}^y$$

   Et donc
   $$\nabla a(x, y) = \left(2xy + 2xy^2 + 2\mathrm{e}^y, x^2 + 2x^2y + 2x\mathrm{e}^y\right).$$

2. $b : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{xy}$ La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $(x, y) \mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale, ainsi b est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que somme et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

   On a
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial b}{\partial x}(x, y) = \mathrm{e}^x - y\mathrm{e}^{xy} \qquad \frac{\partial b}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^y - x\mathrm{e}^{xy}$$

Et donc
$$\nabla b(x,y) = \left(\mathrm{e}^x - y\mathrm{e}^{xy}, \mathrm{e}^y - x\mathrm{e}^{xy}\right).$$

3. $c : (x,y) \mapsto \ln(x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 3)$

   La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, la fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale et vérifie
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 3 \geqslant 3 > 0$$
   Ainsi c est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

   On a
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial c}{\partial x}(x,y) = \frac{4xy^2 + 2x}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3} \qquad \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3 + 4x^2y}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3}$$
   Et donc
   $$\nabla c(x,y) = \left(\frac{4xy^2 + 2x}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3}, \frac{4y^3 + 4x^2y}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3}\right).$$

4. $d : (x,y) \mapsto \cos(x+y) + \sin(x-y)$

   d est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

   On a
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial d}{\partial x}(x,y) = \cos(y-x) - \sin(y+x) \qquad \frac{\partial d}{\partial y}(x,y) = -\sin(y+x) - \cos(y-x)$$
   Et donc
   $$\nabla d(x,y) = \left(\cos(y-x) - \sin(y+x), -\sin(y+x) - \cos(y-x)\right).$$

5. $e : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$

   e est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

   On a
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial e}{\partial x}(x,y) = \frac{y\left(y^2 - x^2 + 1\right)}{\left(y^2 + x^2 + 1\right)^2} \qquad \frac{\partial e}{\partial y}(x,y) = -\frac{x\left(y^2 - x^2 - 1\right)}{\left(y^2 + x^2 + 1\right)^2}$$
   Et donc
   $$\nabla e(x,y) = \left(\frac{y\left(y^2 - x^2 + 1\right)}{\left(y^2 + x^2 + 1\right)^2}, -\frac{x\left(y^2 - x^2 - 1\right)}{\left(y^2 + x^2 + 1\right)^2}\right).$$

6. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{xy}}{\cos(xy) + 2}$

   f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{ye^{xy}\left(\sin(xy) + \cos(xy) + 2\right)}{\left(\cos(xy) + 2\right)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xe^{xy}\left(\sin(xy) + \cos(xy) + 2\right)}{\left(\cos(xy) + 2\right)^2}$$
   Et donc
   $$\nabla f(x,y) = \left(\frac{ye^{xy}\left(\sin(xy) + \cos(xy) + 2\right)}{\left(\cos(xy) + 2\right)^2}, \frac{xe^{xy}\left(\sin(xy) + \cos(xy) + 2\right)}{\left(\cos(xy) + 2\right)^2}\right).$$

7. $g : (x,y) \mapsto x\cos(y) + y\cos(x)$

   g est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On a
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \cos(y) - y\sin(x) \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \cos(x) - x\sin(y)$$
   Et donc
   $$\nabla g(x,y) = \left(\cos(y) - y\sin(x), = \cos(x) - x\sin(y)\right).$$

8. $h:(x,y)\mapsto \arctan\left(\dfrac{x^2}{1+y^2}\right)$

   La fonction $(x,y)\mapsto \dfrac{x^2}{1+y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ainsi h est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\frac{2x\left(y^2+1\right)}{y^4+2y^2+x^4+1}\qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=-\frac{2x^2y}{y^4+2y^2+x^4+1}$$

   Et donc

$$\nabla h(x,y)=\left(\frac{2x\left(y^2+1\right)}{y^4+2y^2+x^4+1},-\frac{2x^2y}{y^4+2y^2+x^4+1}\right).$$

9. Les fonction $(x,y)\mapsto -x^2+2y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Par composition avec la fonction exponentielle, qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto \mathrm{e}^{-x^2+2y}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   De plus, $(x,y)\mapsto xy$ est de $\mathcal{C}^1$, et donc par produit de fonctions $\mathcal{C}^1$, i est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial i}{\partial x}(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2+2y}\left(y-2x^2y\right),\ \frac{\partial i}{\partial y}(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2+2}\left(x+2xy\right).$$

   Et donc

$$\nabla i(x,y)=\left(\mathrm{e}^{-x^2+2y}\left(y-2x^2y\right),\mathrm{e}^{-x^2+2}\left(x+2xy\right)\right).$$

10. La fonction $(x,y,z)\mapsto xy$ est polynomiale, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. De plus, $(x,y,z)\mapsto z$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et comme la fonction exponentielle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors $(x,y,z)\mapsto \mathrm{e}^z$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
    Par produit de fonctions $\mathcal{C}^1$, $(x,y,z)\mapsto xy\mathrm{e}^z$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
    De même, on prouve que $(x,y,z)\mapsto xz\mathrm{e}^y$ et $(x,y,z)\mapsto yx\mathrm{e}^x$ sont $\mathcal{C}^1$, donc j est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ par somme de fonctions $\mathcal{C}^1$.

    On a alors

$$\frac{\partial j}{\partial x}(x,y,z)=y\mathrm{e}^z+z\mathrm{e}^y+y\mathrm{e}^x+yx\mathrm{e}^x,\ \frac{\partial j}{\partial y}(x,y,z)=x\mathrm{e}^z+xz\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^x,\ \frac{\partial j}{\partial z}(x,y,z)=xy\mathrm{e}^z+x\mathrm{e}^y.$$

    D'où

$$\nabla j(x,y,z)=\left(y\mathrm{e}^z+z\mathrm{e}^y+y\mathrm{e}^x+yx\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^z+xz\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^x,xy\mathrm{e}^z+x\mathrm{e}^y\right)$$

11. La fonction $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1^2+\cdots+x_n^2$ est $\mathcal{C}^1$ car polynomiale. Donc, par composition avec la fonction $t\mapsto t\mathrm{e}^{-t}$, qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction k est polynomiale sur $\mathbb{R}^n$. On a alors, pour $i\in[\![1,n]\!]$,

$$\frac{\partial k}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=2x_i\mathrm{e}^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}-2x_i(x_1^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{e}^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}.$$

Corrigé de l'exercice 3

1. La fonction $x\mapsto \sin^2 x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $(x,y,z)\mapsto \sin^2 x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

   De même pour les deux autres termes de la somme, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Puisque f est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, on peut appliquer le théorème de Taylor-Young, ce qui donne :

$$f(x_0+h,y_0+k,z_0+l)\underset{(h,k,l)\to(0,0,0)}{=}f(x_0,y_0,z_0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+l\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+o(\|(h,k,l)\|)$$

   D'où

$$f(x_0+h,y_0+k,z_0+l)\underset{(h,k,l)\to(0,0,0)}{=}\sin^2(x_0)+\cos^2(y_0)+z_0^2+2h\cos(x_0)\sin(x_0)-2k\cos(y_0)\sin(y_0)+2z_0l+o(\|(h,k,l)\|)$$

Corrigé de l'exercice 4

1. D'après la règle de la chaîne, on a
$$\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x-y,x+y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x-y,x+y)\quad \text{et}\quad \frac{\partial f\circ\varphi}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(x-y,x+y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x-y,x+y)$$

2. Par somme, la fonction $(x,y)\mapsto x+\varphi(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et par composition par f, elle même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

   On a alors, par composition,
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=f'(x+\varphi(y)),\qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\varphi'(y)f'(x+\varphi(y))$$
   Puis
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=f''(x+\varphi(y)),\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=\varphi'(y)f''(x+\varphi(y))\quad \text{et}\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=\varphi''(y)f'(x+\varphi(y))+(\varphi'(y))^2f''(x+\varphi(y))$$
   On a donc bien
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

Corrigé de l'exercice 5

1. Si $(x,y,z)=(0,0,0)$, le résultat est évident.
   Sinon, on a $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant\sqrt{x^2}=|x|$, de sorte que
$$|f(x,y,z)|=\frac{|xyz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\leqslant\frac{|x||yz|}{|x|}=|yz|.$$

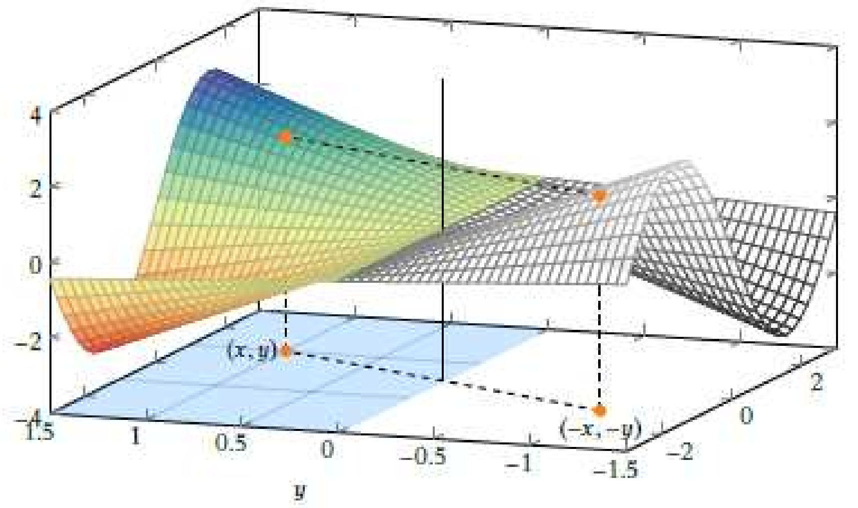
2. Les fonctions $(x,y,z)\mapsto xyz$ et $(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$, et la fonction $t\mapsto\sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Ainsi, $(x,y,z)\mapsto\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^3$, et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$.
   De plus, notons que pour $\eta>0$, si $\|(x,y,z)\|\leqslant\eta$, alors $|y|\leqslant\eta$ et $|z|\leqslant\eta$.
   Soit donc $\varepsilon>0$, et soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\|(x,y,z)\|\leqslant\sqrt{\varepsilon}$. Alors
$$|f(x,y,z)-f(0,0,0)|=|f(x,y,z)|\leqslant|y||z|\leqslant(\sqrt{\varepsilon})^2=\varepsilon.$$
   Ainsi, en posant $\eta=\sqrt{\varepsilon}$, on a bien prouvé que
$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0:\|(x,y,z)\|\leqslant\eta\Rightarrow|f(x,y,z)-f(0,0,0)|\leqslant\varepsilon.$$
   La fonction f est donc continue en $(0,0,0)$, et elle est ainsi continue sur $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Corrigé de l'exercice 6

1. Fixons par exemple $y=0$. Alors $f(x,0)=x^4\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.
   Donc f peut prendre des valeurs arbitrairement grandes : elle ne possède pas de maximum.
2. (a) On a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y)=f(x,y)$.
   Notons alors $\mathcal{H}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\geqslant 0\}$ le demi-plan formé des points d'ordonnée positive.
   Il est évident que si f possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$, alors elle possède un minimum sur $\mathcal{H}$.
   Inversement, supposons que f possède un minimum sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire qu'il existe $(x_0,y_0)\in\mathcal{H}$ tel que
$$\forall(x,y)\in\mathcal{H},\ f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0).$$

Montrons qu'il s'agit également d'un minimum de f sur $\mathbb{R}^2$. Soit donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
• Si $y \geqslant 0$, alors $(x, y) \in \mathcal{H}$ et donc $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$.
• Si $y < 0$, alors $(-x, -y) \in \mathcal{H}$ et donc $f(x, y) = f(-x, -y) \geqslant f(x_0, y_0)$.
Ainsi, on a prouvé que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$: f possède un minimum en (x_0, y_0).
Dans la suite, on restreint donc la recherche de minimum à $\mathcal{H}$.

Figure .1 – Un exemple de fonction vérifiant $f(x, y) = f(-x, -y)$



Sur le plan du bas, on a représenté $\mathcal{H}$ en bleu. La restriction de f à $\mathcal{H}$ est donc la partie en couleur de la surface. Il suffit de connaître cette partie pour en déduire le graphe de f sur $\mathbb{R}^2$: l'autre partie est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des z (résultat à mettre en parallèle de la symétrie de la courbe représentative d'une fonction paire d'une seule variable).
En particulier, si la restriction de f à $\mathcal{H}$ possède un minimum, f possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

(b) Pour y fixé, soit $g_y : x \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à $g_y'(x) = 4(x^3 - y)$. Son tableau de variations est alors le suivant :

Notons que g_y est une fonction d'une seule variable, tout ce qu'il y a de plus classique !

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{y}$		$+\infty$
$g_y'(x)$		$-$	0	$+$	
g_y	$+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt[3]{y}, y)$	$\nearrow$	$+\infty$

et donc g_y admet un minimum en $x = \sqrt[3]{y}$.
Et ce minimum vaut alors

$$g(y) = g_y(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^4 + y^4 - 4\sqrt[3]{y}y = y^4 - 3y^{4/3}.$$

(c) La fonction g est dérivable et $g'(y) = 4(y^3 - y^{1/3})$.
On a alors $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y^3 = y^{1/3} \Leftrightarrow y^9 = y \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 1$.
Le tableau de variation de g est donc

y	0		1		$+\infty$
$g'(y)$	0	$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

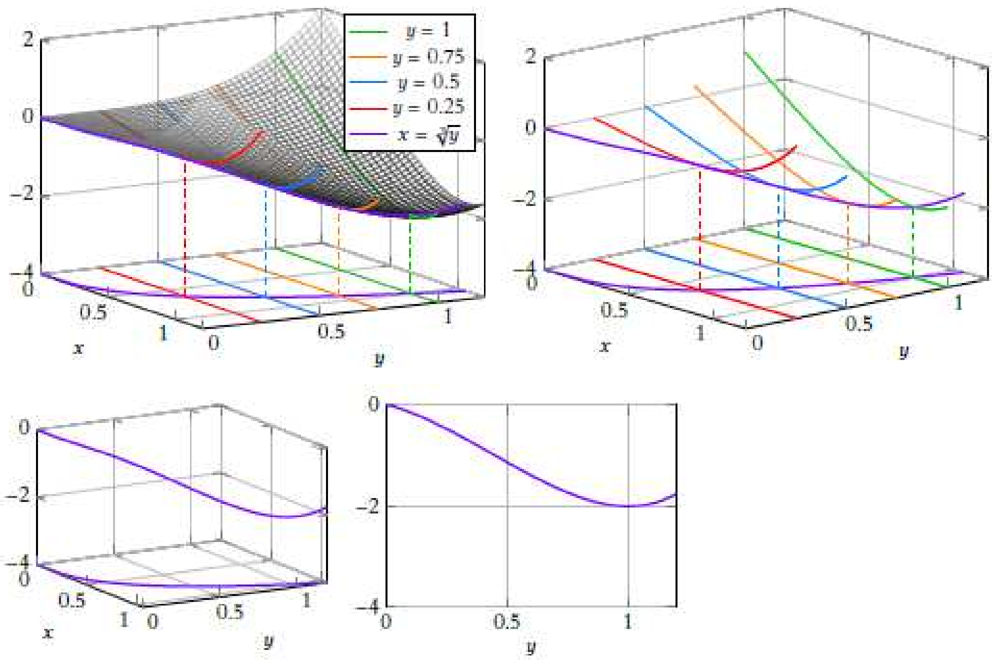
Elle admet donc un minimum en $y = 1$, et ce minimum vaut $g(1) = -2$. On en déduit que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \ f(x, y) \geqslant g(y) \geqslant -2.$$

De plus, on a $f(x, y) = -2$ si et seulement si les inégalités ci-dessus sont des égalités.
En particulier, il faut avoir $g(y) = -2 \Leftrightarrow y = 1$.
Et il faut alors également que $f(x, 1) = g_1(x) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$.
Enfin, si $y \leqslant 0$ on a

$$f(x, y) = f(-x, -y) \geqslant -2$$

avec égalité si et seulement si $(-x, -y) = (-1, -1)$.
Donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geqslant -2$, avec égalité si et seulement si $(x, y) = (1, 1)$ ou $(x, y) = (-1, -1)$.
f possède donc un minimum atteint en deux points qui sont $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.



Pour y fixé, $x \mapsto f(x, y)$ admet un minimum en $x = \sqrt[3]{y}$.
En violet, la courbe reliant ces différents minimums. Il s'agit d'une courbe tracée dans $\mathbb{R}^3$, mais en la regardant « de côté », c'est-à-dire comme le graphe d'une fonction ne dépendant que de la variable y (c'est le dernier dessin), on obtient le graphe de la fonction g. Celle-ci atteint son minimum en $y = 1$. Si on le voit de nouveau dans l'espace, il s'agit du minimum de la fonction f.

Remarque : À priori, cette méthode pourrait fonctionner pour toutes les fonctions de deux variables (et pourrait se généraliser aux fonctions de n variables). Toutefois, il faut pour cela être capable de donner l'expression exacte du (ou des) point(s) en le(s)quel(s) $x \mapsto f(x, y)$ admet un extremum, ce qui est en fait rarement possible.

Corrigé de l'exercice 7

1. La fonction $(x, y) \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Et donc par composition avec la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$, $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^x$ est également de classe $\mathcal{C}^1$.
D'autre part, $(x, y) \mapsto x + y^2$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$, et donc par somme et produit de fonctions $\mathcal{C}^1$, g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
On a alors
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \mathrm{e}^x(x + y^2 + \mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x(1 + x + y^2 + 2\mathrm{e}^x),\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y\mathrm{e}^x.$$

2. La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(t) = 1 + 2\mathrm{e}^t > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$, donc par le théorème de la bijection
De plus, on a $f(-2) = -2 + 2\mathrm{e}^{-2} = 2\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2} - 1\right) < 0$ et $f(-1) = 2\mathrm{e}^{-1} > 0$.
Et donc par stricte croissance de f, on a $\alpha \in]-2, -1[$.

3. Un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de g si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^x(1 + x + y^2 + 2\mathrm{e}^x) = 0 \\ 2y\mathrm{e}^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x + y^2 + 2\mathrm{e}^x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

   Et donc $(\alpha, 0)$ est l'unique point critique de g.
4. On détermine la hessienne de g au point critique $(\alpha, 0)$.

   g est de classe $\mathcal{C}^2$ donc, d'après le théorème de Schwarz

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x(2 + x + y^2 + 4\mathrm{e}^x) & 2y\mathrm{e}^x \\ 2y\mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

   Ainsi

$$H_g(\alpha,0) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^\alpha(2 + \alpha + 4\mathrm{e}^\alpha) & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e}^\alpha \end{pmatrix}$$

   $H_g(\alpha, 0)$ étant diagonale son spectre s'obtient facilement, $\mathrm{Sp}(H_g(\alpha,0)) = \{\mathrm{e}^\alpha(2+\alpha+4\mathrm{e}^\alpha), 2\mathrm{e}^\alpha\}$.

   Or $\alpha \geqslant -2$, ainsi $H_g(\alpha, 0)$ n'a que des valeurs propres strictement positives.

   On ne déduit que g atteint un minimum local en $(\alpha, 0)$.
5. Puisque $\mathrm{e}^x > 0$ et $y^2 > 0$, il est évident que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x,y) = \mathrm{e}^x(1 + x + y^2 + \mathrm{e}^x) \geqslant \mathrm{e}^x(1 + x + \mathrm{e}^x) = g(x, 0).$$

   Notons donc $h : x \mapsto g(x, 0) = \mathrm{e}^x(1 + x + \mathrm{e}^x)$. Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $h' : x \mapsto \mathrm{e}^x(1 + x + 2\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x f(x)$.
   Donc cette dérivée est du signe de f. et donc h possède un minimum en α. On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x, 0) = h(x) \geqslant h(\alpha) = g(\alpha, 0)$.
   Et donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \geqslant g(\alpha, 0)$: g admet un minimum global en $(\alpha, 0)$.
   Notons que puisque g ne possède qu'un point critique, ce minimum n'est atteint qu'en un point.

Corrigé de l'exercice 8

La fonction $(x, y) \mapsto x$ est $\mathcal{C}^1$ car polynomiale, et donc, par composition avec la fonction sin, qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $(x, y) \mapsto \sin(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, $(x, y) \mapsto y^2 - 2y + 1$ est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$, donc $\mathcal{C}^1$ et ainsi, f est $\mathcal{C}^1$ car somme de fonctions $\mathcal{C}^1$.
On a alors, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2.$$

(x, y) est donc un point critique de f si et seulement si $\begin{cases} \cos x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$

Ce système possède une infinité de solutions, qui sont les $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, 1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

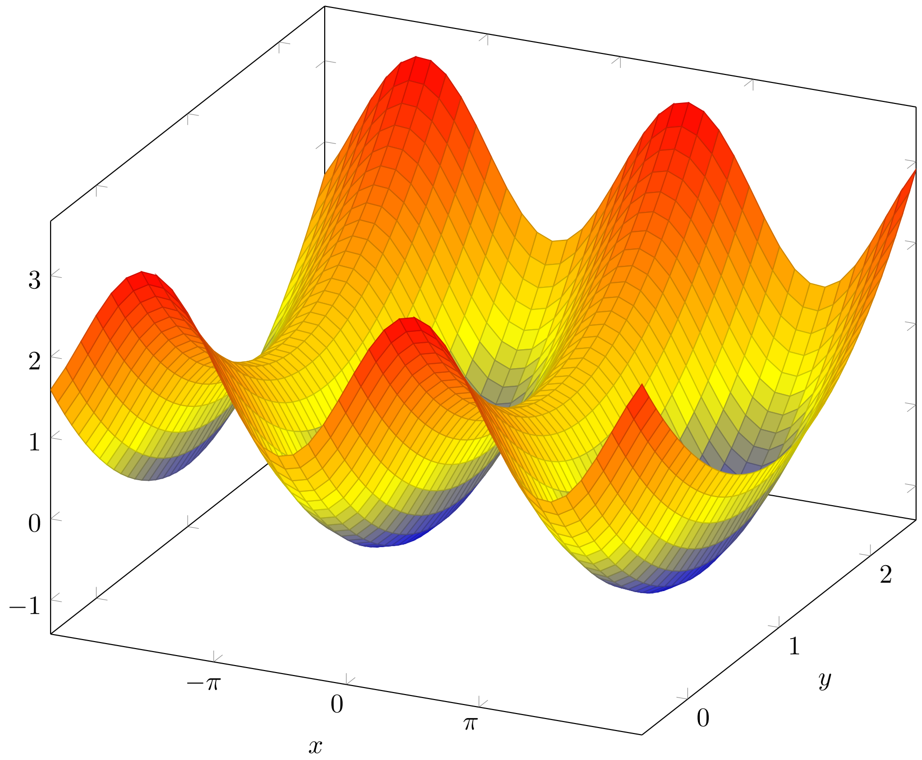
On a alors $f\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, 1\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

Notons que f ne possède pas de maximum car $\lim\limits_{y \to +\infty} f(0, y) = +\infty$. Et donc les $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, 1\right)$ avec k pair ne correspondent pas à des extrema de f.
Enfin, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y) = \sin(x) + (y-1)^2 \geqslant -1 + 0 = -1.$$

Et donc tous les $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, 1\right)$ avec k impair correspondent à des minima de f.

Figure .2 – La fonction f.



Corrigé de l'exercice 9

1. Les fonctions $(x,y,z) \mapsto x+y+z$ et $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ car polynomiales. $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/6}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc par composition et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f est également $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{x}{3}(x+y+z)\mathrm{e}^{-1/6(x^2+y^2+z^2)} + \mathrm{e}^{-1/6(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{y}{3}(x+y+z)\mathrm{e}^{-1/6(x^2+y^2+z^2)} + \mathrm{e}^{-1/6(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}f(x,y,z) = -\frac{z}{3}(x+y+z)\mathrm{e}^{-1/6(x^2+y^2+z^2)} + \mathrm{e}^{-1/6(x^2+y^2+z^2)}$$

(x,y,z) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-1/6(x^2+y^2+z^2)}\,(x(x+y+z)-3)=0 \\ e^{-1/6(x^2+y^2+z^2)}\,(y(x+y+z)-3)=0 \\ e^{-1/6(x^2+y^2+z^2)}\,(z(x+y+z)-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+z)-3=0 \\ y(x+y+z)-3=0 \\ z(x+y+z)-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x(x+y+z)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x^2=1 \end{cases}$$

Donc f admet deux points critiques qui sont $(1,1,1)$ et $(-1,-1,-1)$.

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs (x,y,z) et $(1,1,1)$ nous donne

$$|x+y+z| \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

3. La fonction $g : t \mapsto \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t/6}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

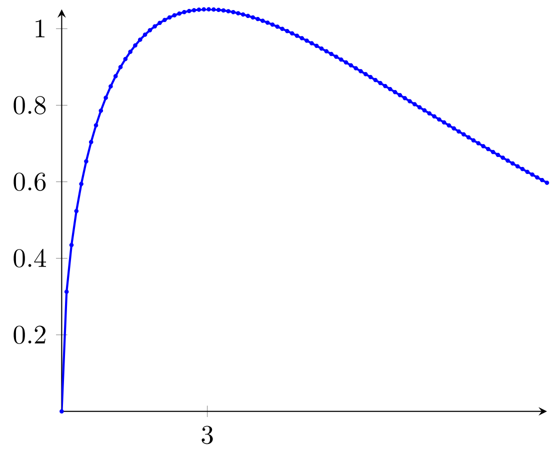
$$g'(t) = -\frac{1}{6}\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}.$$

On a alors

$$g'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{6}\sqrt{t} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}} \geqslant \frac{1}{6}\sqrt{t} \Leftrightarrow t \leqslant 3.$$

Et donc g admet un maximum en $t=3$, et ce maximum vaut $g(3)=\sqrt{3}\mathrm{e}^{-1/2}$.

Figure .3 – La fonction g



Alors, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}|f(x,y,z)| &= |x+y+z|\mathrm{e}^{-1/6(x^2+y^2+z^2)}\\ &\leqslant \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{e}^{-1/6(x^2+y^2+z^2)}\\ &\leqslant \sqrt{3}g(x^2+y^2+z^2)\leqslant \sqrt{3}\sqrt{3}\mathrm{e}^{-1/2}=3\mathrm{e}^{-1/2}=f(1,1,1).\end{aligned}$$

Donc f admet un maximum en $(1,1,1)$.
De même, on a $f(x,y,z)\geqslant -3\mathrm{e}^{-2}=f(-1,-1,-1)$, donc f admet un minimum en $(-1,-1,-1)$.

Corrigé de l'exercice 10

1. Les fonctions $(x,y)\mapsto 1-x, (x,y)\mapsto 1-y, (x,y)\mapsto x+y$ sont $\mathcal{C}^2$ sur Ω, car polynomiales, et ne s'annulent pas sur Ω.
   Donc leurs inverses sont $\mathcal{C}^2$, et alors f est $\mathcal{C}^2$ sur Ω car somme de fonctions $\mathcal{C}^2$. On a alors

   $$\nabla f(x,y)=\left(\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(x+y)^2},\frac{1}{(1-y)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}\right).$$

   De même, il vient $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{2}{(1-x)^3}+\dfrac{2}{(x+y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{2}{(1-y)^3}+\dfrac{2}{(x+y)^3}$ et

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{2}{(x+y)^3}.$$

2. $(x,y)\in\Omega$ est un point critique de f si et seulement si

   $$\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(x+y)^2}\\ \dfrac{1}{(1-y)^2}=\dfrac{1}{(x+y)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)^2=(x+y)^2\\ (1-x)^2=(1-y)^2\end{cases}$$

   Puisque $x\in]0,1[$ et $y\in]0,1[$, on a $1-x\geqslant 0$, $1-y\geqslant 0$ et $x+y\geqslant 0$. Et donc (x,y) est un point critique si et seulement si

   $$\begin{cases}1-x=x+y\\ 1-x=1-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x=2x\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

   Ainsi, f possède sur Ω un unique point critique qui est $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

3. La matrice hessienne de f en $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ est

$$H_f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{27}{2} & \frac{27}{4}\\ \frac{27}{4} & \frac{27}{2}\end{pmatrix}=\frac{27}{4}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Or, les valeurs propres de $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ sont les racines de X^2-4X+3, c'est-à-dire 1 et 3.
Et alors, les valeurs propres de la hessienne sont $\frac{27}{4}$ et $3\times\frac{27}{4}$.Ces deux valeurs propres étant strictement positives, f admet en $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ un minimum local.

Corrigé de l'exercice 11

Notons que les ensembles de définition sont systématiquement ouverts, et les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui nous permet d'utiliser les points critiques.

1. On a $\nabla f(x,y)=(3x^2+y,x+3y^2)$. Donc (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases}3x^2+y=0\\ x+3y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-3x^2\\ x+27x^4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-3x^2\\ x(1+27x^3)=0\end{cases}$$

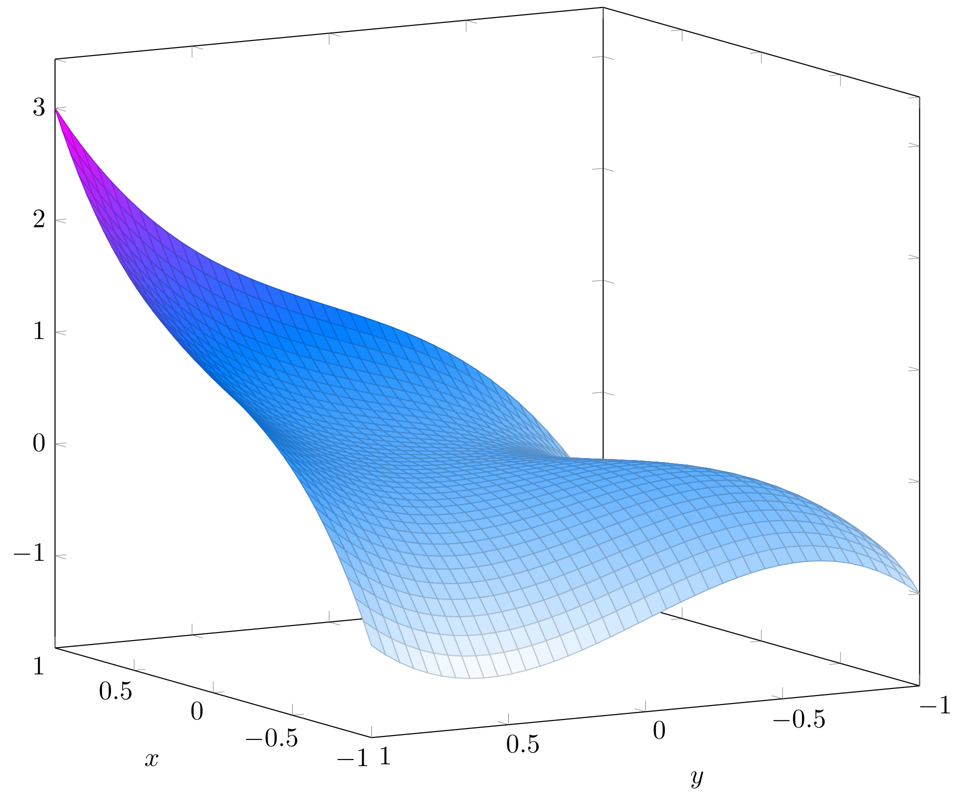
L'équation $1+27x^3=0$ admet une unique solution $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{27}}=-\frac{1}{3}$.
f admet donc deux points critiques $(0,0)$ et $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.
Les dérivées partielles secondes de f sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(x,y)=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=1.$$

Donc au point critique $(0,0)$, on a $H_f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
Ses valeurs propres sont les racines de X^2-1 : ce sont 1 et -1. Ces deux valeurs propres sont non nulles et de signes opposés : $(0,0)$ est un point selle de f.
De même, on a $H_f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.
Ses valeurs propres sont les racines de X^2+4X+3 : ce sont -3 et -1. Elles sont toutes deux négatives, donc f admet un maximum local en $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.
Enfin, f n'admet pas d'extrema globaux car

$$\lim_{x\to+\infty}f(x,0)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}f(0,x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty.$$

Figure .4 – Le maximum local de f est à droite, le point selle est au centre.



2. Le gradient de g est

$$\nabla g(x,y) = \left(4y - \frac{1}{x^2}, 4x - \frac{1}{y^2}\right).$$

Les dérivées partielles secondes sont données par

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3}, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y^3}, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} g(x,y) = 4.$$

(x,y) est un point critique de g si et seulement si

$$\begin{cases} 4x = \dfrac{1}{y^2} \\ 4y = \dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4y^2} \\ 4y = 16y^4 \end{cases}$$

Puisque y est non nul par hypothèse, on en déduit que $y^3 = \dfrac{1}{4}$ et donc $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

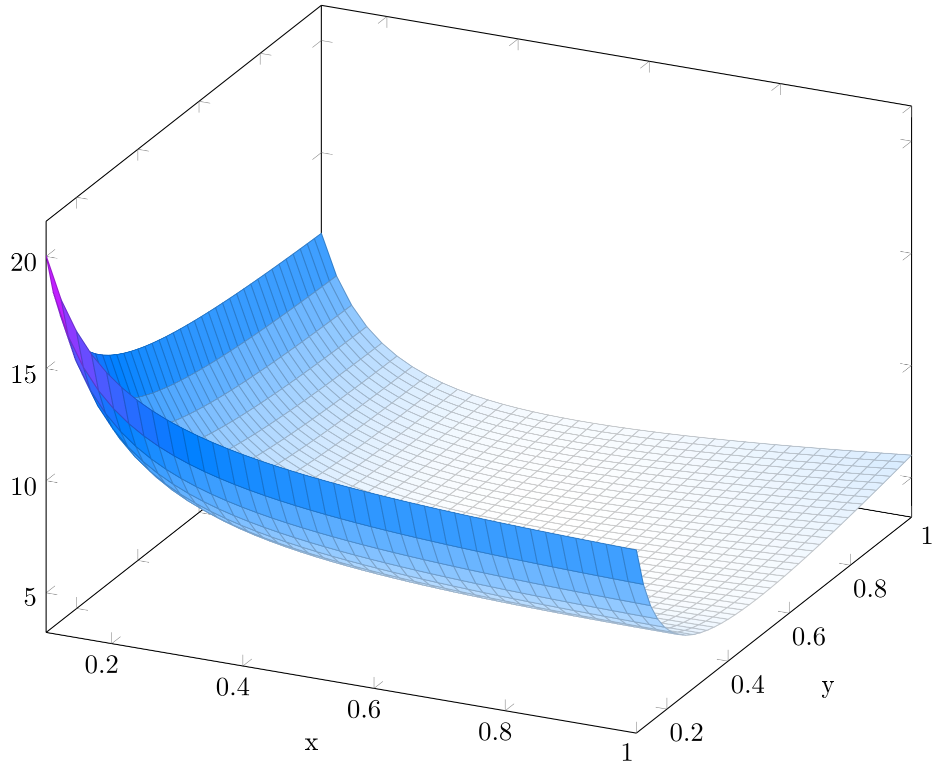
Et alors $x = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{4^{-2/3}} = 4^{-1/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. La matrice hessienne de g en son point critique est alors $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres sont les racines de $X^2 - 16X + 48 = (X-4)(X-12)$.

Les deux valeurs propres étant positives, on en déduit que g admet un minimum local en son unique point critique.

Ce minimum n'est pas global car $g(x,1) = 4x + \dfrac{1}{x} + 1 \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$.

Figure .5 – La fonction g et son minimum.



3. On a $\nabla h(x,y) = \left(2x - \dfrac{1}{(x+y)^2}, 2y - \dfrac{1}{(x+y)^2}\right)$.
Ainsi, (x,y) est un point critique de h si et seulement si

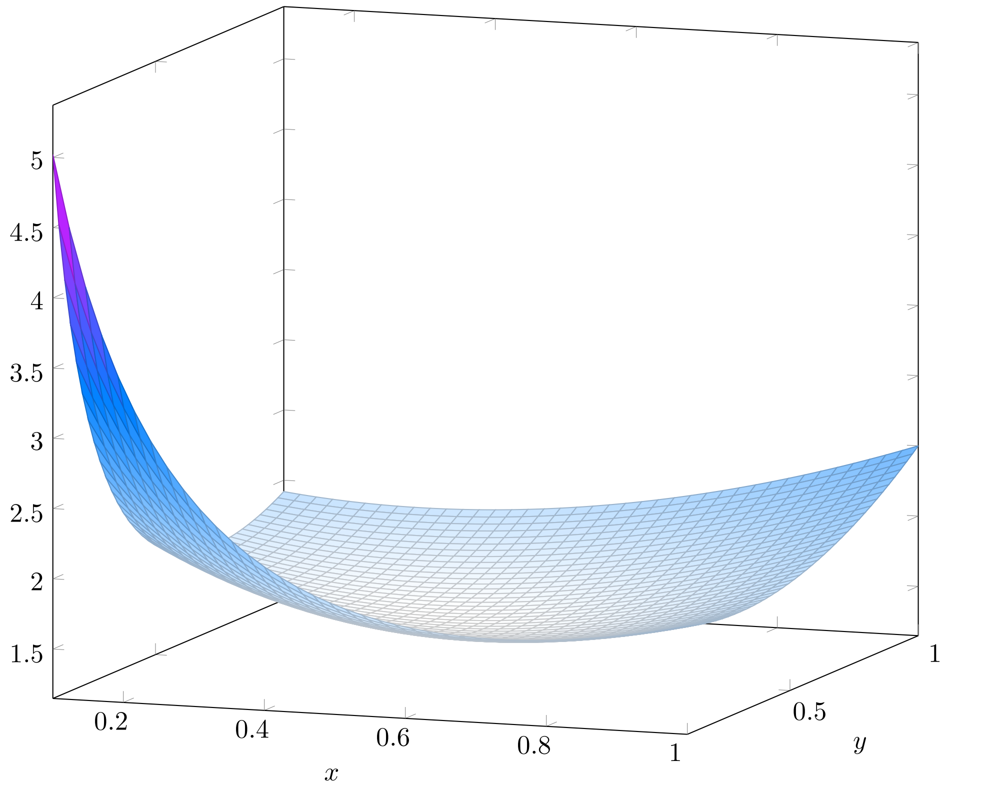
$$\begin{cases} 2x - \dfrac{1}{(x+y)^2} = 0 \\ 2y - \dfrac{1}{(x+y)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = \dfrac{1}{4x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

De plus, les dérivées partielles secondes de h sont données par

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{2}{(x+y)^3}, \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 2 + \frac{2}{(x+y)^3}, \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{2}{(x+y)^3}.$$

La hessienne de h au point critique est donc $H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Ses valeurs propres sont les racines de $X^2 - 8X + 12$: ce sont 6 et 2.
Ces deux valeurs propres sont strictement positives, donc h possède un minimum local en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

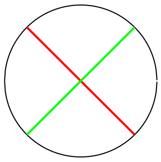
Figure .6 – Le maximum local de h est à droite, le point selle est au centre.



Corrigé de l'exercice 12

1. f est de classe $\mathcal{C}^2$ car polynomiale.
   On a $\nabla f(x,y) = (2x+2y+y^3, 2y+2x+3xy^2)$. Donc (x,y) est un point critique de f si et seulement si
   $$\begin{cases} 2x+2y+y^3 = 0 \\ 2y+2x+3xy^2 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+2y+y^3 = 0 \\ y^2(y-3x) = 0 \end{cases}$$
   De la deuxième équation, on tire $y = 0$ (et alors $x = 0$) ou $y = 3x$.
   Dans ce second cas, la première équation devient alors $8x + 27x^3 = 0 \Leftrightarrow x(8+27x^2) = 0$.
   Donc soit $x = 0$ (et alors on retrouve $y = 0$), soit $8 + 27x^2 = 0$, ce qui est impossible.
   Donc $(0,0)$ est l'unique point critique de f.
2. On a
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + 2xy \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 + 3y^2.$$
   Donc $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
   Cette matrice est de rang 1 car ses deux colonnes sont identiques, et donc possède 0 comme valeur propre. On ne peut donc pas utiliser le signe des valeurs propres pour déterminer la nature du point critique $(0,0)$.
3. On a $f(x,x) = x^4 + 4x^2 = x^2(x^2+4) \geqslant 0$ et $f(x,-x) = -x^4 \leqslant 0$.
   Supposons que f possède un minimum local en $(0,0)$. Alors il existe $r > 0$ tel que pour $(x,y) \in B_o(0,r)$, $f(0,0) \leqslant f(x,y)$.
   Mais $\left\|\left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right)\right\| = \frac{r}{\sqrt{2}} < r$, de sorte que $\left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right) \in B_o(0,r)$.
   Or, $f\left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right) \leqslant 0 = f(0,0)$, contredisant le fait que f admet un minimum local en $(0,0)$.
   On montrerait de même, à l'aide de $f\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$, que f n'admet pas de maximum local en $(0,0)$.

Figure .7



Toute boule centrée en $(0,0)$ contient des points (x,x) (en vert), où f prend des valeurs positives et des points $(x,-x)$ (en rouge), où f prend des valeurs négatives.

Corrigé de l'exercice 13

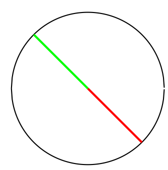
1. f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$.
   On a alors $\nabla f(x,y,z) = 2(x - yzy - xz, z - xy)$ et
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2.$$
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -2z,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -2x.$$
2. (x,y,z) est un point critique de f si et seulement si
   $$\begin{cases} x - yz = 0 \\ y - xz = 0 \\ z - yx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = yz \\ y = xz \\ z = yx \end{cases}$$
   Si $x = 0$, on a alors $y = z = 0$.
   Si $x \neq 0$, alors on a $y = xz = x(xy) = x^2 y$, de sorte que $x^2 = 1$, et donc $x = \pm 1$.
   Si $x = 1$, alors $y = z$, et $1 = x = yz = y^2$, de sorte que $y = \pm 1$. Et alors $z = xy$.
   Les solutions du système sont dont parmi $(0,0,0), (1,1,1), (-1,1,-1), (-1,1,-1), (1,-1,-1)$.
   On vérifie que ces cinq triplets sont bien des solutions du système, et donc que f possède cinq points critiques.
3. La matrice hessienne de f en $(0,0,0)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui possède 2 comme unique valeur propre. Et donc, toutes les valeurs propres de la hessienne étant strictement positives, on en déduit que f admet un minimum local en $(0,0,0)$.
   Il ne s'agit pas d'un minimum global car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,x,x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - x^3 = -\infty$.
4. Les matrices hessiennes aux autres points critiques sont
   $$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, H_f(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
   $$H_f(-1,-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, H_f(-1,1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   On constate que $H_f(1,1,1) - 4I_3$ est une matrice de rang 1

   Mais alors $6 = \mathrm{Tr}\,(H_f(1,1,1)) = 4 \times 2 + \lambda$, où λ est la dernière valeur propre. On obtient alors $\lambda = -2$.
   Ainsi, $H_f(1,1,1)$ possède au moins une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative : f n'admet pas d'extremum local en $(1,1,1)$.
   Le raisonnement est exactement le même pour chacun des autres points critiques, car 4 est alors encore valeur propre de la hessienne, avec un sous-espace propre de dimension 2, et la trace est encore égale à 6, de sorte que -2 est la dernière valeur propre.

Corrigé de l'exercice 14

1. Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ car polynomiales, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition par la fonction logarithme, qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis par produit et par somme, la fonction f est dont $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
On a alors
$$\nabla f(x, y) = \left(\ln y - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} - \ln x\right).$$
2. (x, y) est un point critique de f si et seulement si
$$\begin{cases} \ln y = \dfrac{y}{x} \\ \ln x = \dfrac{x}{y} \end{cases}.$$
En multipliant les deux équations, on obtient $\ln x \ln y = 1$, soit encore $\ln x = \dfrac{1}{\ln y}$. En particulier, $\ln x$ et $\ln y$ sont tous deux positifs. En passant au logarithme dans la première équation, on obtient $\ln(\ln y) = \ln(y) - \ln(x) = \ln(y) - \dfrac{1}{\ln y} \Leftrightarrow \varphi(\ln(y)) = 0$.
3. φ est dérivable et vérifie
$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t - t^2 - 1}{t^2} < 0.$$
Ainsi, φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle s'annule en $t = 1$.
Donc si (x, y) est un point critique de f, alors $\ln y = 1 \Leftrightarrow y = e$.
Et alors $\ln x = \dfrac{1}{\ln y} = 1 \Leftrightarrow x = e$.
On en déduit que f possède un unique point critique (e, e).
4. On a
$$f(e + \alpha, e - \alpha) = (e + \alpha)\ln(e - \alpha) - (e - \alpha)\ln(e + \alpha) = -f(e - \alpha, e + \alpha).$$
Pour α proche de 0, on a
$$\begin{aligned} f(e + \alpha, e - \alpha) &= (e + \alpha)\ln(e - \alpha) - (e - \alpha)\ln(e + \alpha) \\ &= (e + \alpha)\left(1 + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{e}\right)\right) - (e - \alpha)\left(1 + \ln\left(1 + \frac{\alpha}{e}\right)\right) \\ &= (e + \alpha)\left(1 - \frac{\alpha}{e} - \frac{\alpha^2}{2e^2} - \frac{\alpha^3}{3e^3} + o(\alpha^3)\right) - (e - \alpha)\left(1 + \frac{\alpha}{e} - \frac{\alpha^2}{2e^2} + \frac{\alpha^3}{3e^3} + o(\alpha^3)\right) \\ &= -\frac{5}{3e^2}\alpha^3 + o(\alpha^3). \end{aligned}$$
Ceci prouve qu'au voisinage de 0, $f(e+\alpha, e-\alpha)$ prend des valeurs non nulles. Et en particulier, pour $\alpha > 0$ suffisamment proche de 0, $f(e + \alpha, e - \alpha) < 0$.
Or, dans une boule centrée en (e, e), il existe des points de la forme $(e+\alpha, e-\alpha)$ et des points de la forme $(e - \alpha, e + \alpha)$. En ces points, f prend des valeurs respectivement strictement négatives (et donc strictement inférieures à $f(e, e) = 0$.) et strictement positives. Donc f n'admet pas d'extremum local en (e, e) : (e, e) est un point selle de f.

Figure .8



Toute boule centrée en (e, e) contient des points $(e + \alpha, e - \alpha)$ (en rouge) et des points $(e - \alpha, e + \alpha)$ (en vert).

Corrigé de l'exercice 15

1. La fonction f est continue sur $\mathcal{D}$ car elle y est polynomiale. Puisque $\mathcal{D}$ est un fermé borné, f y admet donc automatiquement un maximum et un minimum.
2. Sur l'ouvert $\mathcal{D}_0$, f est de classe $\mathcal{C}^1$, toujours car elle est polynomiale. Et on a alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xy + 2x, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x^2.$$
Et donc $(x, y) \in \mathcal{D}_0$ est un point critique de f si et seulement si
$$\begin{cases} -2xy + 2x = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - y) = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases}$$

De la première équation, il vient $x = 0$ ou $y = 1$.
Si $x = 0$, alors $y = 0$, ce qui nous donne un premier point critique $(0, 0)$.
Si $y = 1$, alors $x = \pm\sqrt{2}$.
Or les points $(\sqrt{2}, 1)$ et $(-\sqrt{2}, 1)$ ne sont pas dans l'ouvert $\mathcal{D}_0$.
Donc sur $\mathcal{D}_0$, f ne possède qu'un seul point critique en $(0, 0)$.

3. Soit g la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$g(x) = f(x, x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - x^2(x^2 - 1) + x^2 = 1.$$

Donc g est constante sur $[-1, 1]$.

Notons h la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$h(x) = f(x, 1 - x^2) = (1 - x^2)^2 - x^2(1 - x^2) + x^2 = 2x^4 - 2x^2 + 1.$$

Alors h est dérivable sur $[-1, 1]$, avec

$$h'(x) = 8x^3 - 4x = 4x(2x^2 - 1).$$

Le tableau de variation de h est donc donné par

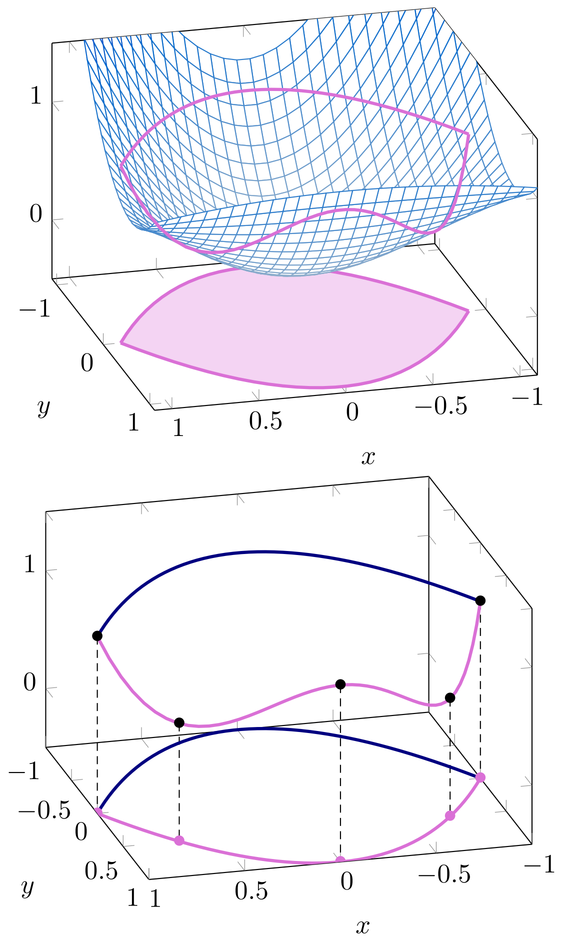
x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

Ainsi, h admet un maximum sur $[-1, 1]$, qui vaut 1 et qui est atteint en -1, en 1 et en 0.
Et h atteint un minimum en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, et ce minimum vaut $\frac{1}{2}$.

Le minimum m de f est soit atteint sur l'ouvert $\mathcal{D}_0$, soit sur $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$.
Or, les points de $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$ sont ceux de la forme $(x, x^2 - 1)$ ou de la forme $(x, 1 - x^2)$.
Nous venons de prouver que sur $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$, f prend des valeurs comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1.
Alors que $f(0, 0) = 0$. Donc le minimum de f sur $\mathcal{D}$ est atteint sur $\mathcal{D}_0$, et donc nécessairement en $(0, 0)$: $mf(0, 0) = 0$.

De la même manière, le maximum M de f sur $\mathcal{D}_0$ est nécessairement atteint soit en un point critique sur $\mathcal{D}_0$, soit en un point du bord de $\mathcal{D}$.
Puisque $(0, 0)$ est l'unique point critique, on en déduit que M est atteint sur $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$, et donc les études de fonctions précédemment effectuées prouvent que $M = 1$.

Figure .9 – En bleu la fonction $x \mapsto f(x, 1-x^2)$ et en violet la fonction (constante) $x \mapsto f(x, x^2-1)$.



Corrigé de l'exercice 16

1. Notons que $\mathcal{D}$ n'est autre que la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 1, il s'agit donc d'un fermé borné.

   Puisque f, qui est polynomiale sur $\mathcal{D}$ est continue, elle y admet donc un maximum et un minimum.
2. Notons que $B_o(0,1)$ est un ouvert, sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   On a alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3(1+y^2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xy$.
   Ainsi, (x,y) est un point critique de f sur $B_o(0,1)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3x^2 - 3(1+y^2) = 0 \\ -6xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 + y^2 \\ xy = 0 \end{cases}$$

   De la première équation, il vient $x^2 > 0$, et donc $x \neq 0$, de sorte que la seconde équation nous donne nécessairement $y = 0$.
   Et donc $x^2 = 1$. Mais alors $x^2 + y^2 = 1$, et donc $(x,y) \notin B_o(0,1)$.
   Ainsi, f n'admet pas de point critique sur l'ouvert $B_o(0,1)$.
   Et par conséquent, le maximum et le minimum de f sur $\mathcal{D}$ ne peuvent être atteints sur $B_o(0,1)$.Ainsi, f atteint forcément son maximum et son minimum sur des points de $\mathcal{D} \setminus B_o(0,1)$, c'est-à-dire en des points du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 (autrement dit, sur le cercle trigonométrique).
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$.
   Lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, $(\cos t, \sin t)$ parcourt le cercle trigonométrique.
   Et par 2π-périodicité des fonctions trigonométriques, on peut se limiter à étudier g sur un

intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.
Et donc l'ensemble $\{f(x,y),\ x^2+y^2=1\}$ des valeurs prises par f sur le cercle trigonométrique est égal à $\{f(\cos t, \sin t),\ t \in [-\pi,\pi]\}$, c'est-à-dire à l'image de g.
On a alors

$$g(t) = \cos^3 t - 3\cos t(1+\sin^2 t) = \cos t(1 - 3 - 3(1-\cos^2 t) = \cos t(-6 + 4\cos^2 t).$$

En particulier, on remarque que g est paire, et donc il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$.
Ainsi, g est dérivable sur $[0, \pi]$ et

Rappelons que $\cos(-t) = \cos(t)$.

$$g'(t) = -\sin t(-6+4\cos^2 t) + \cos t(-8\sin t \cos t) = 6 \sin t(1 - 2\cos^2 t).$$

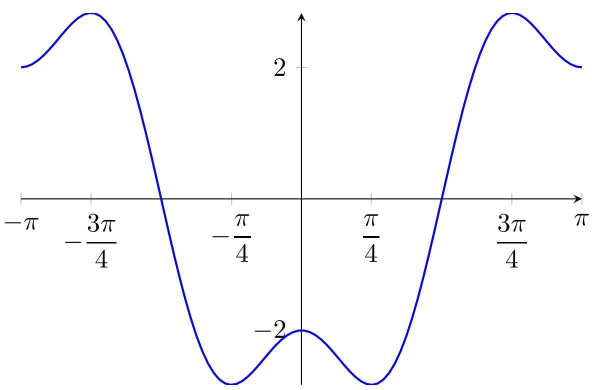
Pour $t \in [0, \pi]$, on a

$$1 - 2\cos^2 t \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos^2 t \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}2}{\leqslant}\cos t \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4}.$$

Et donc le tableau de variations de g est donné par

t	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
$\sin t$	0	$+$		$+$		$+$	0
$1-2\cos^2 t$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(t)$	-2	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

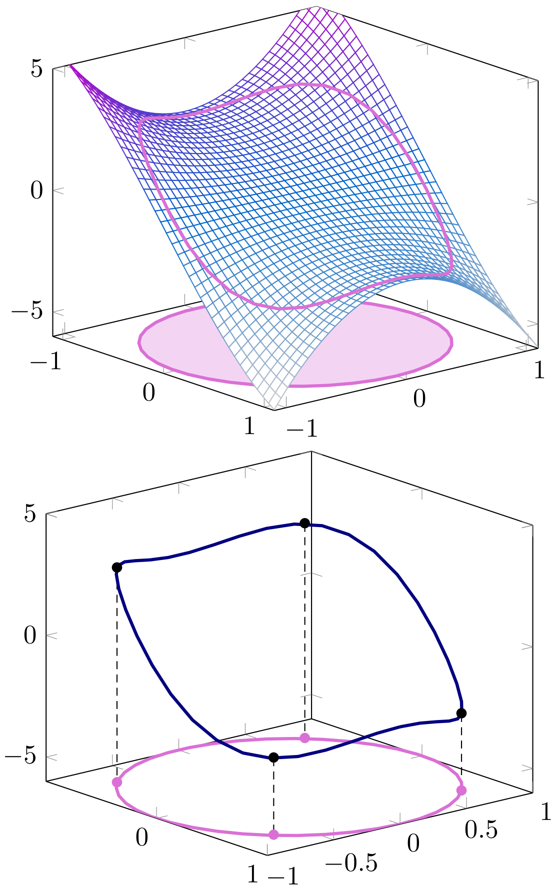
Figure .10 – La fonction g.



Ainsi, g admet pour minimum $-2\sqrt{2}$ et pour maximum $2\sqrt{2}$.
On en déduit donc que $m = -2\sqrt{2}$ et $M = 2\sqrt{2}$.

De plus, le minimum de f est alors atteint en deux points de $\mathcal{D}$ qui sont $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.De même, le maximum M de f est atteint en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Figure .11 – En violet : l'ensemble $\mathcal{D}$. En bleu : les valeurs prises par f sur le bord de cet ensemble,ainsi que les quatre extrem



Corrigé de l'exercice 17

1. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors nous savons que F est de classe $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée est f.

C'est le théorème fondamental de l'analyse.

On a de plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y) = \frac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{F(xy) - F(x)}{x}$$

On va poser le changement de variable $t = sx$ dans l'intégrale, on a alors, pour $y \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

$$\frac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^y f(sx)\,\mathrm{d}s$$

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ fixé et $\delta > 0$

— La fonction $s \mapsto f(sx)$ est intégrable sur $[1, y_0]$ en tant que fonction continue sur ce segment

— La fonction $x \mapsto f(sx)$ est continue sur $]-\delta, \delta[$

— f est continue sur le segment $[-\delta|y_0|, \delta|y_0|]$, elle y est donc bornée par une constante K. Ainsi

$$\forall s \in [1, y], \quad \forall x \in]-\delta, \delta[, \qquad f(xs) \leqslant K$$

Et la fonction $s \mapsto K$ est intégrable sur le segment $[1, y_0]$

D'après le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres, la fonction $\varphi_{y_0} : x \mapsto \displaystyle\int_1^{y_0} f(sx)\,\mathrm{d}s$ est continue en 0. En particulier $\varphi_{y_0}(0) = \displaystyle\int_1^{y_0} f(0)\,\mathrm{d}s = f(0)(y_0 - 1)$.

Notons que cela ne montre pas que g se prolonge par continuité en $(0, y_0)$. Par contre cela nous indique que, si g se prolonge par continuité en $(0, y_0)$ alors $g(0, y_0) = f(0)(y_0 - 1)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times R$, on a

$$f(0)(y_0-1) = \frac{1}{x}\int_x^{xy_0} f(0)\,\mathrm{d}t$$

D'où

$$\begin{aligned}
|g(x,y) - f(0)(y_0-1)| &= \left|\frac{1}{x}\left(\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{xy_0} f(0)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \frac{1}{|x|}\left|\int_x^{xy} f(t)-f(0)\,\mathrm{d}t - \int_{xy}^{xy_0} f(0)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|x|}\left|\int_x^{xy} f(t)-f(0)\,\mathrm{d}t\right| + |f(0)(y-y_0)|
\end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$. Si $\sqrt{x^2+(y-y_0)^2} \leqslant \delta$ alors $|x| \leqslant \delta$ et $|xy| \leqslant \delta(y_0+\delta)$.

Soit $\varepsilon > 0$, f est continue en 0, il existe donc $\nu > 0$ tel que, si $|t| \leqslant \nu$ alors $|f(t)-f(0) \leqslant \varepsilon$.

Prenons alors δ tel que $\max(\varepsilon, \varepsilon(y_0+\varepsilon)) \leqslant \nu$ et $\delta \leqslant \varepsilon$

On a alors, si $(x,y) \in B((0,y_0),\delta)$

$$\begin{aligned}
|g(x,y) - f(0)(y_0-1)| &\leqslant \frac{1}{|x|}\left|\int_x^{xy} f(t)-f(0)\,\mathrm{d}t\right| + |f(0)(y-y_0)| \\
&\leqslant \frac{1}{|x|}\left|\int_x^{xy} \varepsilon\,\mathrm{d}t\right| + |f(0)(y-y_0)| \\
&\leqslant \varepsilon|y-1| + |f(0)(y-y_0)| \\
&\leqslant \varepsilon|y_0+\varepsilon-1| + |f(0)|\varepsilon \\
&\leqslant \varepsilon\left(|y_0-1| + \varepsilon + |f(0)|\right)
\end{aligned}$$

Par la caractérisation de la limite, ceci montre que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = f(0)(y_0-1)$. g est donc bien prolongeable par continuité en $(0,y_0)$.

Finalement g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

2. Prenons $f : t \mapsto |t|$, f est bien continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

   On a alors $g(x,y) = \dfrac{|x|(y|y|-1)}{2}$.

   Cette fonction n'est pas dérivable, en effet on a $g(0,0) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = -1/2$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = 1/2$. g n'a donc pas de dérivée partielle suivant x en $(0,0)$.

   En toute généralité la fonction prolongée g n'est donc ni de classe $\mathcal{C}^1$, ni de classe $\mathcal{C}^2$.

Corrigé de l'exercice 18

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ telle que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Soit $g : (x,y) \mapsto f\left(\dfrac{x}{y}, xy\right)$

g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + y\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{y}, xy\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + x\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{y}, xy\right)$$

Puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{y}, xy\right) - \frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{x}{y}, xy\right) - \frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + \frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial y \partial x}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + xy\frac{\partial f}{\partial y^2}\left(\frac{x}{y}, xy\right)$$

D'où

$$\begin{aligned} xy\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} &= -\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + xy\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{y}, xy\right) - \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + x^2y^2\frac{\partial f}{\partial y^2}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \\ &= -\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + xy\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \\ &= y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Soit $y > 0$ et $\varphi : x \mapsto \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$, on a alors $x\varphi'(x) = \varphi(x)$.

Ainsi, il existe une fonction K de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\varphi : x \mapsto K(y)x$.

Puis, en primitivant par rapport à y à x fixé on en déduit qu'il existe deux fonctions a et b de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$g : (x, y) \mapsto xa(y) + b(x)$$

On a alors $f(x, y) = g\left(\sqrt{xy}, \sqrt{\frac{x}{y}}\right) = \sqrt{xy}a(\sqrt{xy}) + b\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$.

En posant $\alpha : t \mapsto a(\sqrt{t})$ et $\beta : t \mapsto b(\sqrt{t})$ on a finalement

$$f(x, y) = \sqrt{xy}\alpha(xy) + \beta\left(\frac{x}{y}\right)$$

Réciproquement on vérifie par un calcul aisé que, si a et b sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et $f : (x, y) \mapsto \sqrt{xy}\alpha(xy) + \beta\left(\frac{x}{y}\right)$ alors f vérifie bien l'équation aux dérivées partielles voulue.

Corrigé de l'exercice 19

1. Posons le changement de variable $s = 2x + t$ dans l'intégrale, on a alors

$$F(x, y) = \int_{-x}^{y} \mathrm{e}^{x+t} f(2x + t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{2x+y} \mathrm{e}^{s-x} f(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-x}\int_{x}^{2x+y} \mathrm{e}^{s} f(s)\,\mathrm{d}s$$

La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une primitive φ de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

On a alors $F(x, y) = \mathrm{e}^{-x}(\varphi(2x + y) - \varphi(x))$.

Par produit et composition de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. On a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -\mathrm{e}^{-x}(\varphi(2x+y) - \varphi(x)) + \mathrm{e}^{-x}(2\varphi'(2x+y) - \varphi'(x)) = -F(x, y) + 2\mathrm{e}^{x+y}f(2x+y) - f(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^{-x}\varphi'(2x + y) = \mathrm{e}^{x+y}f(2x + y)$$

Puis

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \mathrm{e}^{x+y}(2f(2x+y) + 4f'(2x+y)) - f'(x) = F(x, y) + f(x) + 4\mathrm{e}^{x+y}f'(2x+y) - f'(x)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}(f(2x + y) + f'(2x + y))$$

D'où

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)+2\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)-4\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)+F(x,y)$$
$$=F(x,y)+f(x)+4\mathrm{e}^{x+y}f'(2x+y)-f'(x)-2F(x,y)+4\mathrm{e}^{x+y}f(2x+y)-2f(x)-4\mathrm{e}^{x+y}(f(x+2y)+f'(x+2y)$$
$$=-f'(x)-f(x)$$

Ainsi F est solution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial F}{\partial x}-4\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+F=1$ si et seulement si $f'+f=-1$.

L'équation différentielle $f'+f=-1$ a pour solutions les fonctions de la forme $f:t\mapsto K\mathrm{e}^{-t}-1$ avec $K\in\mathbb{R}$.

On en déduit que F est solution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial F}{\partial x}-4\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+F=1$ si et seulement s'il existe $K\in\mathbb{R}$ tel que $f:t\mapsto K\mathrm{e}^{-t}-1$

On peut alors calculer explicitement F, on a

$$F:(x,y)\mapsto \mathrm{e}^{-x}\left(K(x+y)+\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{y+2x}\right)$$

Corrigé de l'exercice 20

1. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3-3y^2,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-6xy$$

Les points critiques de f sont alors les points (x,y) tels que $\begin{cases}x^2-y^2=1\\ xy=0\end{cases}$.

Il s'agit de $(1,0)$ et $(-1,0)$.

On a de plus

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6x\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6y$$

D'où $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}6x & -6y\\ -6x & -6y\end{pmatrix}$.

$H_f(1,0)$ et $H_f(-1,0)$ ont toutes pour valeurs propres -6 et 6, ainsi $(1,0)$ et $(-1,0)$ sont des points selles de f.

2. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ x^2+y^2\leqslant 2\}$. D est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. Puisque f est continue on en déduit qu'elle admet un maximum et un minimum sur D.

On vient de voir que f n'atteint un extremum local en aucun des points critiques précédents. Ainsi le maximum et le minimum de f sont atteint sur le bord de D.

Le bord de D est un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$, on le paramètre par $\begin{cases}x(t) &= \sqrt{2}\cos(t)\\ y(t) &= \sqrt{2}\sin(t)\end{cases}$.

On est alors amenés à étudier $\varphi:t\mapsto f(\sqrt{2}\cos(t),\sqrt{2}\sin(t))$ sur $[0,2\pi]$

Pour $t\in[0,2\pi]$ on a

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\cos(t)\left(2\cos(t)^2-3-6\sin(t)^2\right)=-\sqrt{2}\cos(t)\left(1+8\sin(t)^2\right)$$

φ étant paire on limitera notre étude à $[0,\pi]$. On a alors

$$\varphi'(t)=\sqrt{2}\left(\sin(t)\left(1+8\sin(t)^2\right)-16\cos^2(t)\sin(t)\right)=3\sqrt{2}\sin(t)\left(3-8\cos^2(t)\right)$$

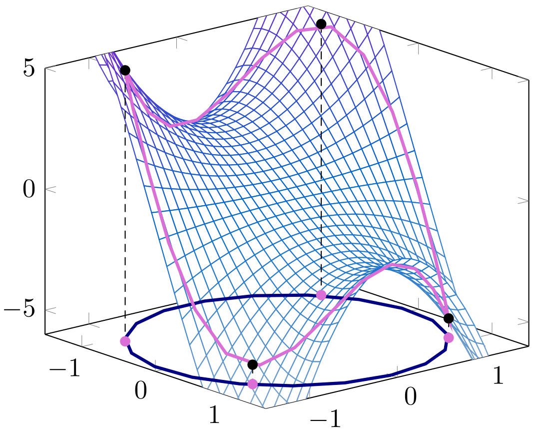
On en déduit le tableau de variations suivant

t	0		$\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$		$\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$		π
$\varphi'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$-z$	
$\varphi(t)$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$\varphi(\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right))$	$\nearrow$	$\varphi(\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{8}}\right))$	$\searrow$	$\sqrt{2}$

On a par ailleurs $\varphi(\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)) = -3\sqrt{3} \simeq -5.2$ et $\varphi(\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)) = 3\sqrt{3} \simeq 5.2$

De l'étude des variations de φ on en déduit que le maximum de f sur D est atteint en $\left(\cos\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\right), \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\right)\right) = \left(-\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\cos\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\right), -\sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\right)\right) = \left(-\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$. et que le minimum de f sur D est atteint en $\left(\cos\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\right), \sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\right)\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\cos\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\right), -\sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\right)\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$.

Figure .12



Corrigé de l'exercice 21

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto (t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, il n'y a donc d'éventuels problème qu'au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

   Par croissances comparées on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2} = \lim\limits_{t\to-\infty} t^2(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0$.

   Ainsi $(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

   Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont des intégrales convergentes.

   De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$.

Ainsi d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Par continuité de l'intégrande sur le segment $[-1,1]$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Par les mêmes arguments que la question précédente les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
Or, leurs intégrandes étant impaires on ne déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=0$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty}(t^2-2xt+x^2)(t^2-2yt+y^2)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(t^4-2(x+y)t^3+(x^2+y^2+4xy)t^2-2xy(x+y)t+x^2y^2)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}t^4\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t-2(x+y)\int_{-\infty}^{+\infty}t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\
&\quad+(x^2+y^2+4xy)\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t-2xy(x+y)\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+x^2y^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}+(x^2+y^2+4xy)\frac{\sqrt{\pi}}{2}+x^2y^2\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

D'où

$$F(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(x^2+y^2+4xy)+x^2y^2$$

3. F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=x+2y+2xy^2,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=y+2x+2x^2y$$

Le point (x,y) est alors un point critique de F si et seulement si $\begin{cases}x+2y+2xy^2 &=0\\ y+2x+2x^2y &=0\end{cases}$.

On a

$$\begin{aligned}\begin{cases}x+2y+2xy^2 &=0\\ y+2x+2x^2y &=0\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}x+2y+2xy^2 &=0\\ 3x+3y+2x^2y+2yx^2 &=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x+2y+2xy^2 &=0\\ (x+y)(3+2xy) &=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}-x+2x^3=0\\ y=-x\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}-\dfrac{-3}{2y}+2y-3y=0\\ x\neq 0 \text{ et } y\neq 0\\ x=-\dfrac{3}{2y}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x(2x^2-1)=0\\ y=-x\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}y^2=\dfrac{-3}{2}\\ x\neq 0 \text{ et } y\neq 0\\ x=-\dfrac{3}{2y}\end{cases}\end{aligned}$$

Les points critiques de F sont donc $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

On a de plus

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 1+2y^2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 1+2x^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = 2+4xy$$

D'où $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2y^2 & 2+4xy \\ 2+4xy & 1+2x^2 \end{pmatrix}$.

— $H_F(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres de signes opposés, $(0,0)$ est donc un point selle de F.
— $H_F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2I_2$ a deux valeurs propres strictement positives, F atteint donc un minimum local en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Figure .13